Matematiske modeller

I dette projekt skal I arbejde med en af de mest anvendelige dele indenfor matematik, nemlig modellering.

En matematisk model vil typisk være en funktion, der beskriver sammenhængen mellem to eller flere variabler. Funktionen kan være en simpel lineær sammenhæng, mens andre sammenhænge bedre beskrives med for eksempel potens-, eksponentiel eller en trigonometrisk sammenhæng. Når I anvender ligningerne i fysik eller andre fag, beskriver ligningerne netop sammenhængen mellem forskellige fysiske størrelser. Ligningerne er dermed en model over sammenhænge i naturen.

# Forskellige typer sammenhænge

I har i matematik stiftet bekendtskab med en række grundlæggende matematematiske sammenhænge. Egenskaberne for disse skal I beskrevet i nogle af de følgende opgaver. Her følger en beskrivelse af en lineær sammenhæng.

## Lineær sammenhæng

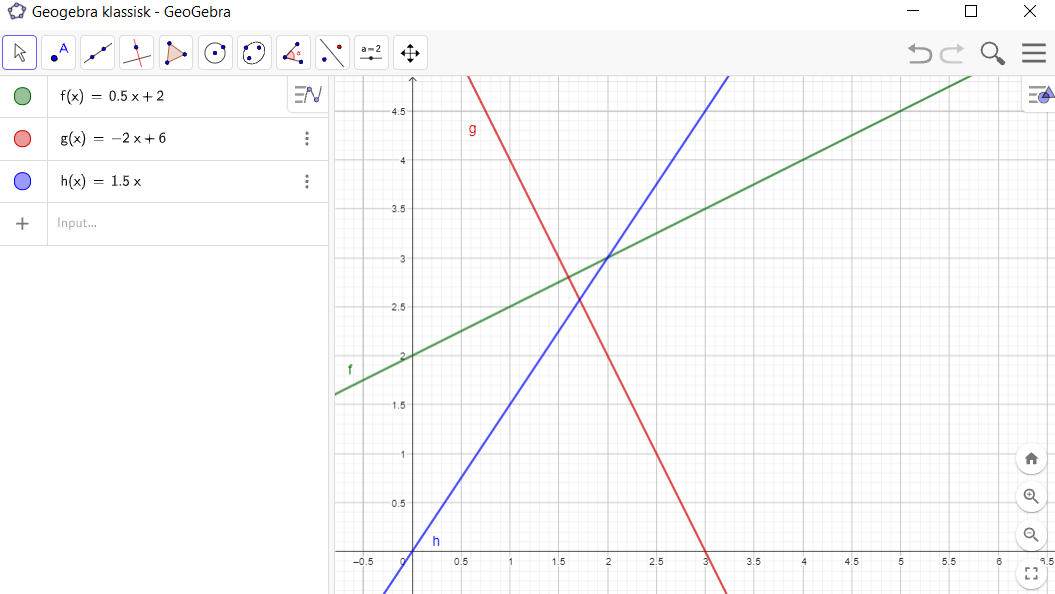
En lineær sammenhæng kan beskrives med funktionen:

Hvor a kaldes stigningstallet og b angiver skæringen med y-aksen.

Karakteristisk for en lineær sammenhæng er at hver gang x-værdien vokser med fast bestemt værdi, vokser funktionsværdien også med en fast værdi. Grafen for en lineær sammenhæng giver en ret linje. Se Figur 1.

Et specialtilfælde er når b-værdien er nul:

Dette kalden en ligefrem proportional sammenhæng. Denne vil skære i origo (0,0).



Figur Tre forskellige typer lineære sammenhænge

Lav nu en tilsvarende beskrivelse af de andre funktionstyper

1. Giv en kort beskrivelse af en polynomisk sammenhæng. Stikord: Udseende, funktionsforskrift, parabel, rødder, toppunkter og højere ordens polynomier.
2. Giv en kort beskrivelse af en potentsammenhæng. Stikord: Udseende, funktionsforskrift, betydning af eksponent, omvendt proportionel sammenhæng og særlige egenskaber
3. Giv en kort beskrivelse af en trigonometrisk sammenhæng. Stikord: Udseende, funktionsforskrift, harmonisk svingning, amplitude, vinkelhastighed, fase, frekvens og periodetid.
4. Giv en kort beskrivelse af en eksponentiel sammenhæng. Stikord: Udseende, funktionsforskrift, grundtal, fordoblings- og halveringstid.
5. Giv en kort beskrivelse af en logaritmisk sammenhæng. Stikord: Udseende, funktionsforskrift, omvendt funktion.

Når man beskriver sammenhænge i naturen, dækker det også over matematiske sammenhænge, der kan beskrives ved simple funktioner.

1. Overvej hvilke typer matematiske funktioner der er gemt i idealgasligningen: . I skulle gerne kunne genkende en proportionel sammenhæng af typen og en potensfunktion af typen . Den sidste type er også en omskrivning af en omvendt proportionel sammenhæng.

Hvis vi undersøger formlen for tyngdekraften , ser vi at tyngdekraften aftager med kvadratet på afstanden . Denne sammenhæng er en potenssammenhæng af typen .

1. Prøv at omskrive formlen for tyngdekraften til en potenssammenhæng, ved at sætte og . Hvad bliver og ?

Man siger at naturens sprog er matematik, fordi så mange naturlove kan beskrive ved relativt simple matematiske formler. Men det er ikke kun naturlove, der lader sig beskrive med matematiske formler. Man kan opstille modeller for sammenhængen for madvarers holdbarhed som funktion af opbevaringstemperature eller høstudbytte som funktion af nedbørsmængde. Man benytter også matematiske modeller til at beskrive økonomisk udvikling og andre samfundsvidenskabelige sammenhænge.

# Procedure for matematisk modellering

Vi vil nu prøver at lave en procedure for hvordan man kan håndtere komplekse problemstillinger, hvor man gerne vil transformere en række observationer (empiriske data) til en sammenhæng, der kan beskrives matematisk. Ud fra den matematiske model, kan man mere præcist beskrive egenskaberne ved denne sammenhæng, samt komme med ny viden, der ikke umiddelbart fremgår af de oprindelige data. Som metode vil vi kombinere vores forståelse af de data vi vil analysere med regressionsanalyse og vores viden om de forskellige typer matematiske sammenhænge.

Som case vil vi undersøge hvordan man kan håndtere følgende problemstilling:

I forbindelse med et projekt om produktion af biobrændsel, skal det undersøges hvor hurtigt træer vokser.

1. Diskuter hvilke parametre vil det være relevant af inddrage, hvis man skulle lave en model for træers væksthastighed.

En matematisk model vil næsten altid være en forenkling af virkeligheden. Det vil ikke være muligt at tage alle parametre med i modellen. Jo færre variable, der skal med i modellen, des enklere bliver modellen. Men hvis der er for få parametre (variable), kan modellen blive uanvendelig.

I casen vil det bl.a. være nødvendigt at begrænse modellen til én træsort, da forskellige trætorter ikke vokser lige hurtigt. Tidsintervallet bør også begrænses til ét år, da træer vokser ujævnt gennem året.

Der skal indsamles empirisk data, som modellen kan opbygges på baggrund af. Her er det vigtigt, at de data man får samlet samme, er repræsentative for den sammenhæng man vil beskrive. Samtidig er det altid en fordel med så meget data som muligt, da det gør modellen mere robust. Men man skal også være kritisk og eventuelt fjerne data, som man ikke tror passer ind i den model man vil opstille.

I casen skal der indsamles data, der kan bruges til at bestemme både alder og vægt for mange træer af samme sort, men med forskellig størrelse. En mulighed ville være at tage ud og fælde og veje en masse træer. Alternativt kunne man måske finde data, som andre har indsamlet. Se Figur 2.

1. Diskutér hvordan man skulle udvælge relevante måledata. Kom med eksempler på data der skal sorteres fra inden modelleringen.

Ud fra måledata skal der laves en matematisk model. Dette kan gøres ved at lave en regressionsanalyse i MathCad eller Excel. Regressionsanalysen bestemmer parametrene for den matematisk funktionstype, som man har valgt. Valget af funktionstype skal man selv foretage. For at finde en velegnet funktionstype skal man både analysere resultatet af regressionsanalyserne og vurdere hvordan den valgte funktion stemmer med den type sammenhæng der skal analyseres.

I casen med træers vækst, vil det være rimeligt at tage udgangspunkt i en model, der starter i origo, da et træ på 0 år må antages at have en vægt på 0 kg. Ved at kigge på årringene for et træ, ser man at diameteren for en træstamme vokser lineært med tiden. Dermed vil tværsnitsarealet antages at vokse med kvadratet på alderen. Hvis man samtidig antager at højden på et træ vokser med alderen, kan man komme med et kvalificeret bud på hvilken matematisk model der bedst burde beskrive sammenhængen

1. Giv en bud på hvilken type matematisk funktion, der kunne danne grundlag for modelleringen.



Figur Eksempel på måledata for diameter og højde for træer i forskellige aldre

Kilde: https://www.researchgate.net/figure/Diameter-age-and-height-diameter-relationships-for-688-trees-in-the-database\_fig2\_8959167

## Dekomposition

Når man vil lave en matematisk modellering af en kompleks problemstilling, skal man først opdele problemstillingen i simplere delspørgsmål, der kan analyseres hver for sig. Der vil sjældent være mulighed for at behandle alle delproblemer i en kompleks problemstilling. Det er derfor nødvendigt at lave en problemafgrænsning, der efterlader ét eller få delproblemer der kan behandles fyldestgørende indenfor ét fagområde.

Det er vigtigt af man kan skaffe pålidelige data af det man vil beskrive. Det er også vigtigt at de data man skaffer er så ensartede som muligt.

Ved casen med træer er det f.eks. væsentligt at man holder til én træsort og samme typer vækstbetingelser, for at dataene er pålidelige.

## Mønstergenkendelse

Når man laver en matematisk model, ved at anvende regressionsanalyse, skal der også vælges en funktionstype, som basis for modellen.

Vi er nødt til at sætte os ind i hvilke type sammenhæng vi forsøger at beskrive. Er der nogle forventede bindinger i de data vi vil beskrive. Forventer vi at modellen vil have en startværdi, vil funktionen være voksende eller aftagende, vil væksten være voksende eller aftagende osv.

Vores viden om de data vi vil modellere, skal sammenholdes med den viden, vi har om de forskellige funktionstyper.

I casen med vækst af træer, var vi kommet frem til at en potensfunktion burde kunne beskrive vores data.

## Abstraktion

Når man omsætter sine empiriske data til en matematisk model, vil der altid ske en generalisering af observationerne. Dermed vil der også være et tab af information. Man vil helt bevidst se bort fra de data man ikke forventer vil passe ind i modellen. Modellen vil beskrive den generelle sammenhæng, men ikke nødvendigvis specialtilfælde.

## Algoritme

Med algoritme forstår her en teknik til at gå fra et datasæt til en matematisk model.

1. Udvælg det datasæt, der skal danne baggrund for modellen.
2. Lav et punktdiagram over dataene
3. Overvej om der er outliers, der skal fjernes, før der laves en regressionsanalyse
4. Vurder hvilken type model der ville kunne passe med data
5. Lav en regressionsanalyse med den valgte funktionstype
6. Vurder om grafen passer på datapunkterne
   1. Forklaringsgrad
   2. Systematisk afvigelse / residualplot
7. Overvej modellens muligheder og begrænsninger

I de efterfølgende opgaver med modellering, er et af problemerne være at finde og udvælge passende empirisk date, som man kan bygge en model ud fra. Vores data skal være relevant for det vi gerne vil undersøge, vores kilder skal være troværdige og vi skal have tilstrækkelig med data til at kunne opstille en god matematisk model.

# Opgaver med matematisk modellering

# Opgave 1

## Det flyvende menneske

Tænk hvis mennesker kunne flyve ligesom fugle. Men det ville naturligvis kræve at vi havde vinger. Hvor store skulle vingerne være, for at de ville være store nok til at bære et menneske.

Her er vi naturligvis nødt til at se bort fra rent fysiologiske problemer, med at vores kropsstruktur og muskler ikke er designet til vinger.

1. Find data på samhørende værdier for vingefang og vægt for forskellige fugle., og opstil en matematisk model for sammenhængen mellem vingefang og vægt, baseret på de indsamlede data.
2. Argumenter for valget af matematiske model.
3. Beregn hvor store vinger du ville skulle have, ud fra modellen.
4. Hvor stort en vægt ville man kunne bære med et vingefang på 8 meter?
5. Hvor mange procent skulle vingefanget forøges ved en vægtforøgelse på 10 procent?

[](https://www.google.dk/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwiijNXm9rHXAhXMbZoKHUQxBIoQjRwIBw&url=https%3A%2F%2Fwww.quora.com%2FHoe-can-I-fly-with-artificial-wings&psig=AOvVaw1M_LcjMKJZ0QnutST-dh8O&ust=1510331628782049)

Kilde https://screencrush.com/angel-in-x-men-apocalypse/

# 

# Opgave 2

## Verdensrekorden i løb

Kan man forudsige hvor hurtigt nogen kan løbe en bestemt distance? På wikipedia er der samlet en oversigt over verdensrekorder i løb for mænd og kvinder.

Kilde: https://da.wikipedia.org/wiki/Verdensrekorder\_i\_atletik

1. Opstil en matematisk model for sammenhængen for distancen og tiden, for både mænd og kvinder - ud fra de oplyste data.
2. Kommentér på om modellerne giver en god beskrivelse af sammenhængen mellem distance og tid for verdensrekorderne.
3. Hvor hurtigt vil det ifølge modellen være muligt at gennemføre en distance på 2500 meter, for en mand?
4. Hvor langt vil en kvinde, ifølge modellen løbe på 10 minutter?



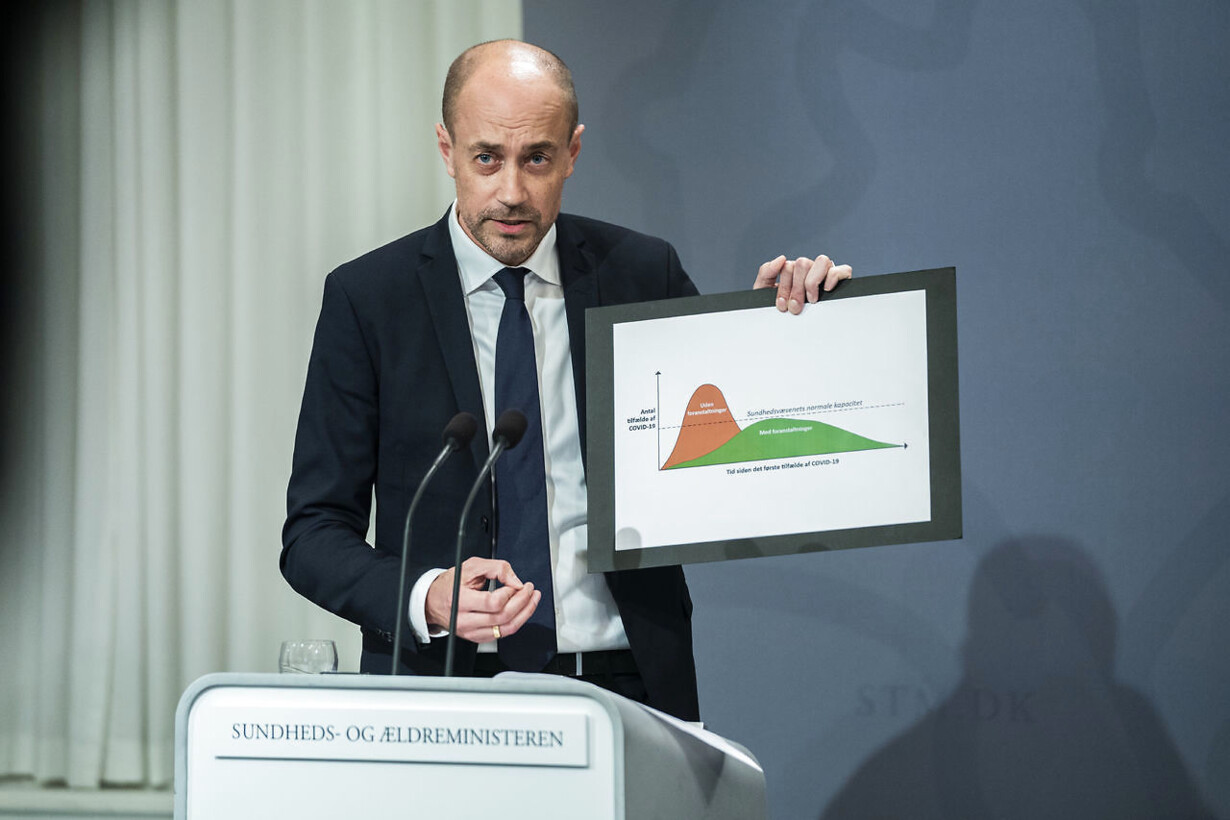
Kilde https://fitcetera.wordpress.com/2012/10/12/want-to-run-faster-read-on/

# Opgave 3

## Corona

Under coronapandemien fik vi daglige opdateringer om hvor mange nye smittede der var hver dag. Der blev nedsat en ekspertgruppe med specialister indenfor smitsomme sygdomme samt matematikere og statistikere. Denne gruppe skulle lave matematiske modeller over smitteudviklingen, så man kunne gribe ind og lave restriktioner, der skulle forhindre en eksplosiv udvikling af antallet af smittede.

Data over antal smittede kan findes hos Danmarks Statistik <https://www.statistikbanken.dk/statbank5a/default.asp?w=1536>



Kilde https://www.berlingske.dk/politik/politikere-efterlyser-mere-klarhed-om-danmarks-coronastrategi-der-opstaar

1. Find data for antallet af smittede i Danmark i perioden 1. oktober 2021 til 1. januar 2022. Tegn en graf over antallet af smittede i perioden

Da antallet af smittede ofte svinger noget over en uge, kan det være en god idé at glatte kurven ud. Dette kan I gøre ved at lave et løbende gennemsnit over den seneste 7 dage.

1. Vurder hvilken matematisk model der kan beskrive antallet af smittede i den givne periode og opstil modellen på baggrund af en regressionsanalyse
2. Hvor stort ville antallet af smittede have været den 20. januar og den 1. marts, hvis udviklingen havde fulgt modellen
3. Diskuter om modellen kan benyttes til at forudse antallet af smittede langt ude i fremtiden.